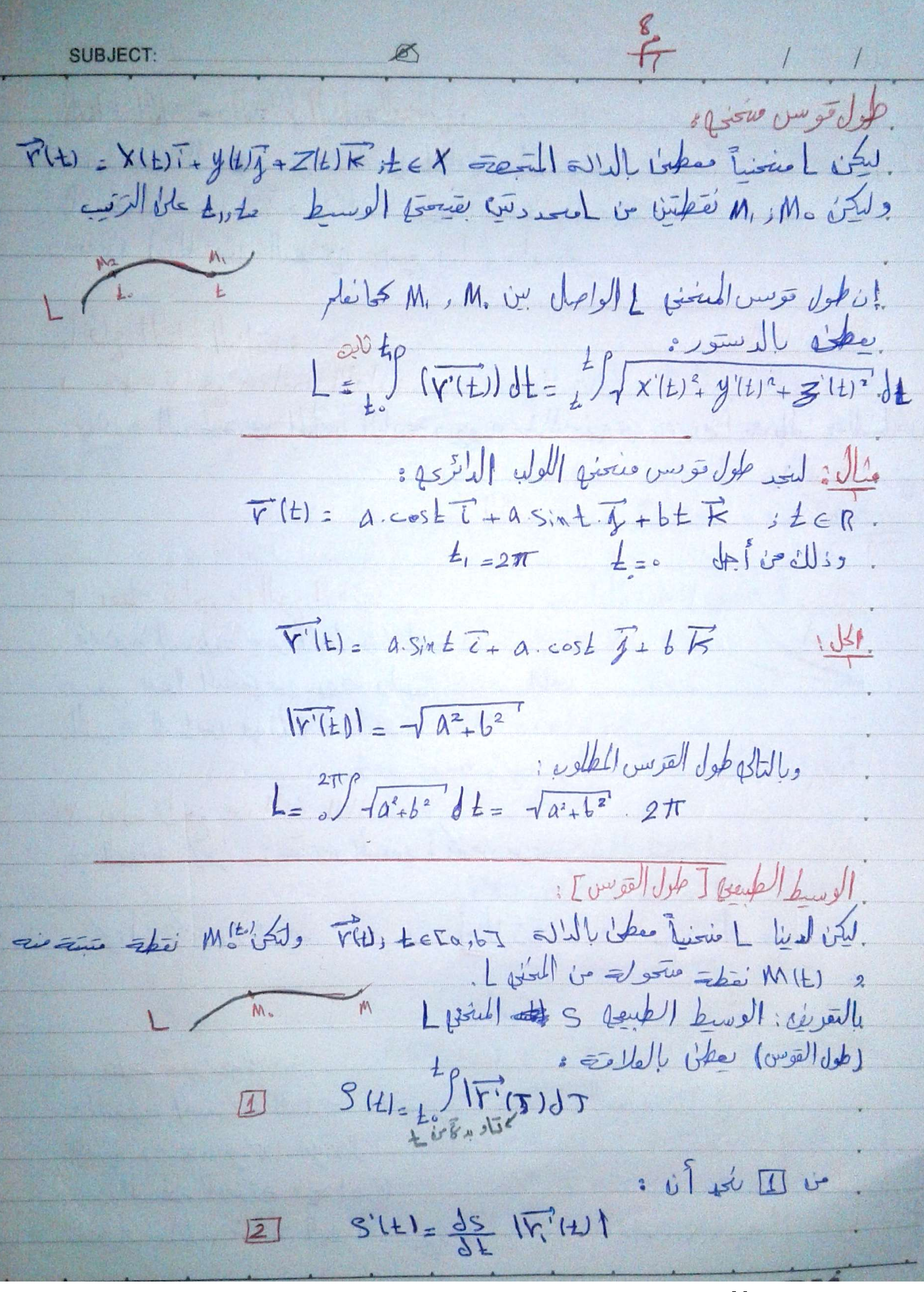


طول قوس منحني:

ليكن L منحنياً معطى بالدالة المتجهة $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$; $t \in X$

ولتكن M_0 ، M_1 نقطتين من L محددتين بقيمتي الوسيط t_0, t_1 على الترتيب

إن طول قوس المنحني L الواصل بين M_0 ، M_1 كما نعلم يعطى بالدستور:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

مثال: لنجد طول قوس منحني اللولب الدائري:

$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$; $t \in R$

وذلك من أجل $t_0 = 0$ ، $t_1 = 2\pi$

الحل:

$\vec{r}'(t) = a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\,\vec{k}$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$

وبالتالي طول القوس المطلوب:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\pi$$

الوسيط الطبيعي [طول القوس]:

ليكن لدينا L منحنياً معطى بالدالة $\vec{r}(t)$; $t \in [a,b]$ ولتكن $M_0(t_0)$ نقطة مثبتة منه و $M(t)$ نقطة متحولة من المنحني L.

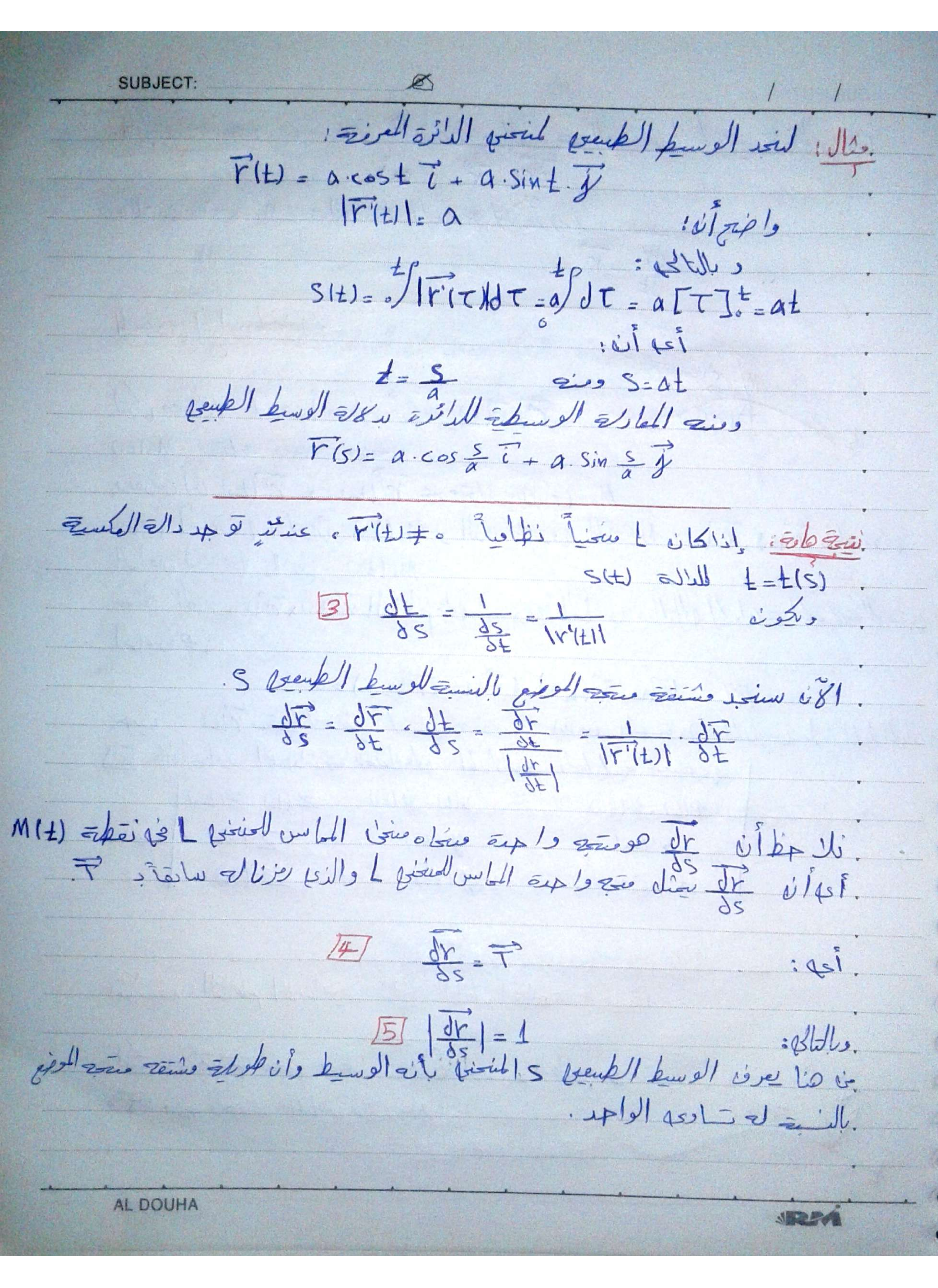
بالتعريف: الوسيط الطبيعي s للمنحني L (طول القوس) يعطى بالعلاقة:

[1] $$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}'(\tau)|\, d\tau$$

(تاو بدلاً عن t)

من [1] نجد أن:

[2] $$s'(t) = \frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$$



مثال: لنجد الوسيط الطبيعي لمنحني الدائرة المعرفة:

$$\vec{r}(t) = a\cdot\cos t\ \vec{i} + a\cdot\sin t\cdot\vec{j}$$

واضح أنه: $|\vec{r}'(t)| = a$

وبالتالي:

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau = a\int_0^t d\tau = a[\tau]_0^t = at$$

أي أن:

$s = at$ ومنه $t = \frac{s}{a}$

ومنه المعادلة الوسيطية للدائرة بدلالة الوسيط الطبيعي

$$\vec{r}(s) = a\cdot\cos\frac{s}{a}\ \vec{i} + a\cdot\sin\frac{s}{a}\ \vec{j}$$

نتيجة هامة: إذا كان L منحنياً نظامياً $\vec{r}'(t) \neq 0$، عندئذٍ توجد دالة العكسية $t = t(s)$ للدالة $s(t)$

ويكون:

[3] $$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|}$$

الآن سنجد مشتقة متجه الموضع بالنسبة للوسيط الطبيعي s.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{dr}{dt}\right|} = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

نلاحظ أن $\frac{d\vec{r}}{ds}$ هو متجه واحدة متجاه مع المماس للمنحني L في نقطة M(t)

أي أن $\frac{d\vec{r}}{ds}$ يمثل متجه واحدة المماس للمنحني L والذي رمزنا له سابقاً بـ $\vec{T}$.

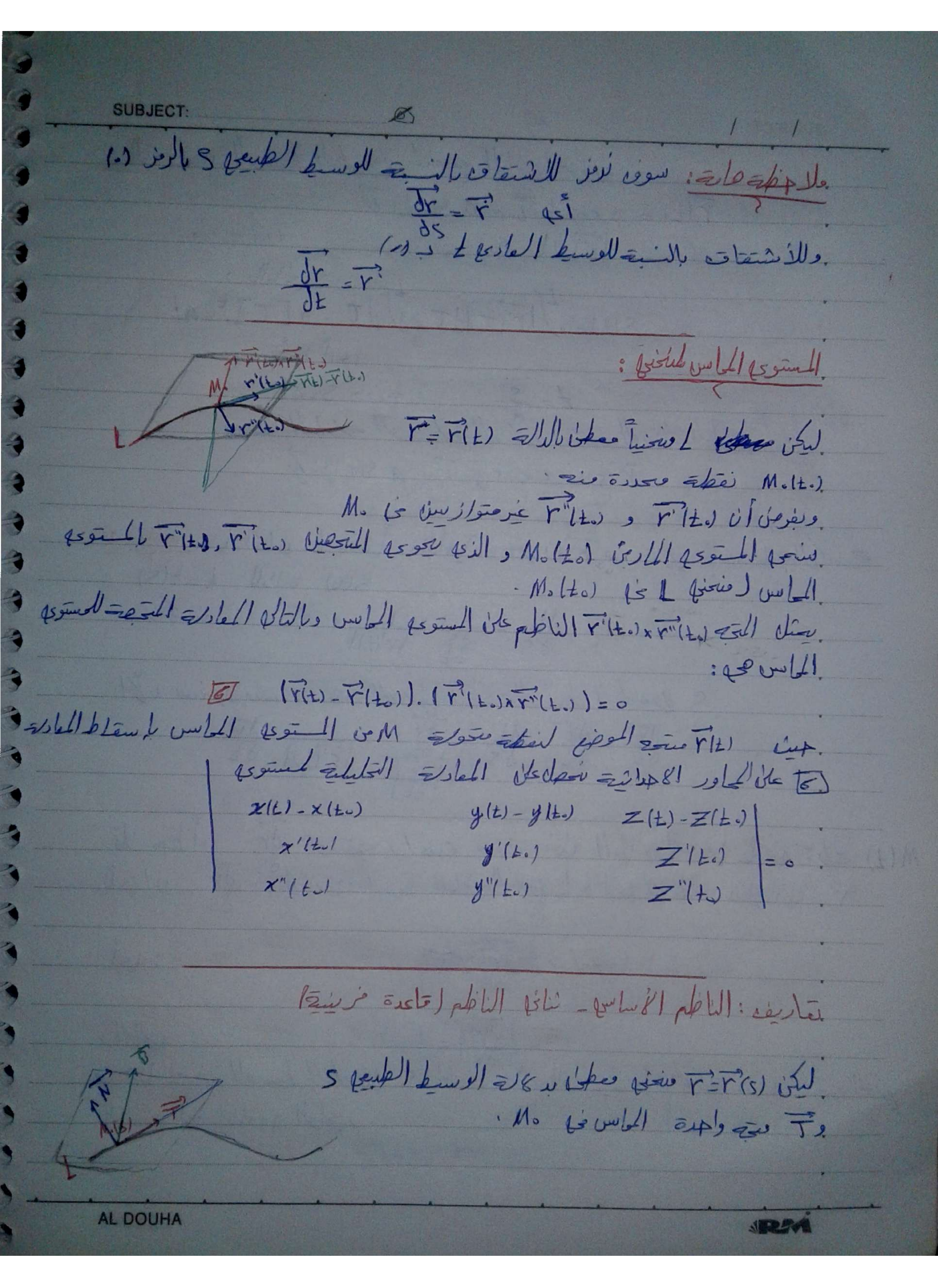
أي:

[4] $$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$$

وبالتالي:

[5] $$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$$

من هنا يعرف الوسيط الطبيعي s للمنحني بأنه الوسيط وأن طويلة مشتقة متجه الموضع بالنسبة له تساوي الواحد.



SUBJECT:

ملاحظة هامة: سوف نرمز للاشتقاق بالنسبة للوسيط الطبيعي S بالرمز $(\cdot)$

أي $\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}$

وللاشتقاق بالنسبة للوسيط العادي t بـ $(')$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'$$

المستوي المماس للمنحني:

ليكن L منحنياً معطى بالدالة $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$M_0(t_0)$ نقطة محددة منه.

ونفرض أن $\vec{r}'(t_0)$ و $\vec{r}''(t_0)$ غير متوازيين في M_0

نسمي المستوي المار في $M_0(t_0)$ والذي يحوي المتجهين $\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$ بالمستوي المماس لمنحني L في $M_0(t_0)$.

يمثل المتجه $\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)$ الناظم على المستوي المماس وبالتالي المعادلة المتجهة للمستوي المماس هي:

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)).(\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)) = 0 \quad \boxed{6}$$

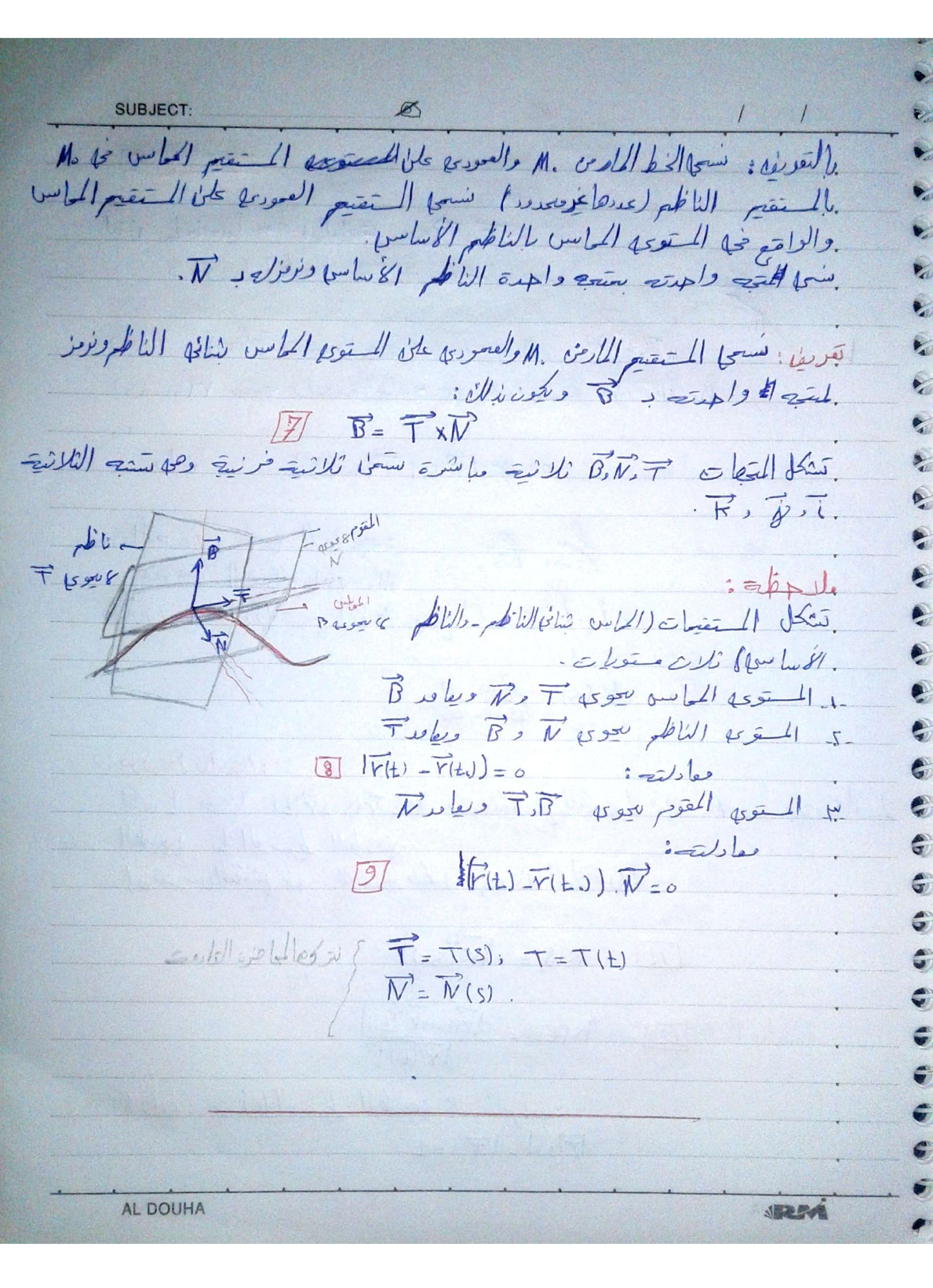
حيث $\vec{r}(t)$ متجه الموضع لنقطة متحولة M من المستوي المماس بإسقاط المعادلة $\boxed{6}$ على المحاور الإحداثية نحصل على المعادلة التحليلية لمستوي

$$\begin{vmatrix} x(t) - x(t_0) & y(t) - y(t_0) & z(t) - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

تعاريف: الناظم الأساسي - ثنائي الناظم - قاعدة فرينيه

ليكن $\vec{r} = \vec{r}(s)$ منحنٍ معطى بدلالة الوسيط الطبيعي S

و $\vec{T}$ متجه واحدة المماس في M_0.



بالتعريف: نسمي الخط المار من M_0 والعمودي على المستقيم المماس في M_0 بالمستقيم الناظم (عددها غير محدود) نسمي المستقيم العمودي على المستقيم المماس والواقع في المستوي المماس بالناظم الأساسي.

نسمي المتجه واحدة بمتجه واحدة الناظم الأساسي ونرمز له ب $\vec{N}$.

تعريف: نسمي المستقيم المار من M_0 والعمودي على المستوي المماس بثنائي الناظم ونرمز لمتجه الواحدة ب $\vec{B}$ ويكون بذلك:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \qquad (7)$$

تشكل المتجهات $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ثلاثية مباشرة تسمى ثلاثية فرنية وهي تشبه الثلاثية $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

ملاحظة:

تشكل المستقيمات (المماس، ثنائي الناظم، الناظم) الأساسي ثلاث مستويات.

1. المستوي المماس يحوي $\vec{T}$ و $\vec{N}$ ويعامد $\vec{B}$
2. المستوي الناظم يحوي $\vec{N}$ و $\vec{B}$ ويعامد $\vec{T}$

معادلته:

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) = 0 \qquad (8)$$

3. المستوي المقوم يحوي $\vec{T}, \vec{B}$ ويعامد $\vec{N}$

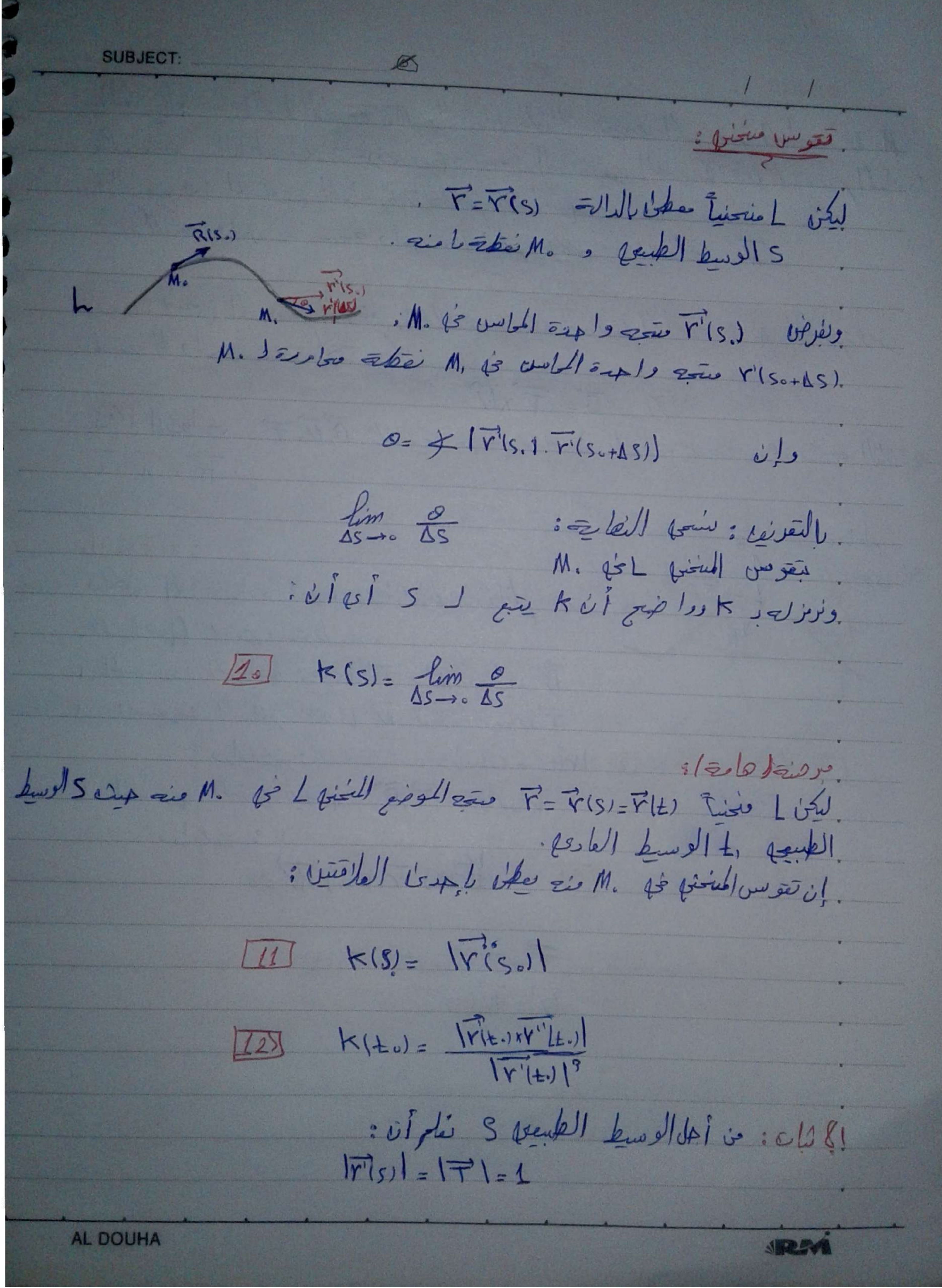
معادلته:

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{N} = 0 \qquad (9)$$

نتركه للمحاضرة القادمة

$\vec{T} = T(s)$; $T = T(t)$

$\vec{N} = \vec{N}(s)$.



تقوس منحنى:

ليكن L منحنياً معطى بالدالة $\vec{r}=\vec{r}(s)$ ،
s الوسيط الطبيعي و M_0 نقطة ما منه.

ولنفرض $\vec{r}'(s_0)$ متجه واحدة المماس في M_0 :
$r'(s_0+\Delta s)$ متجه واحدة المماس في M_1 نقطة مجاورة لـ M_0.

وإن $\theta = \measuredangle(\vec{r}'(s_0), \vec{r}'(s_0+\Delta s))$

بالتعريف: نسمي النهاية: $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{\Delta s}$
بتقوس المنحني L في M_0
ونرمز له بـ k وواضح أن k يتبع لـ s أي أن:

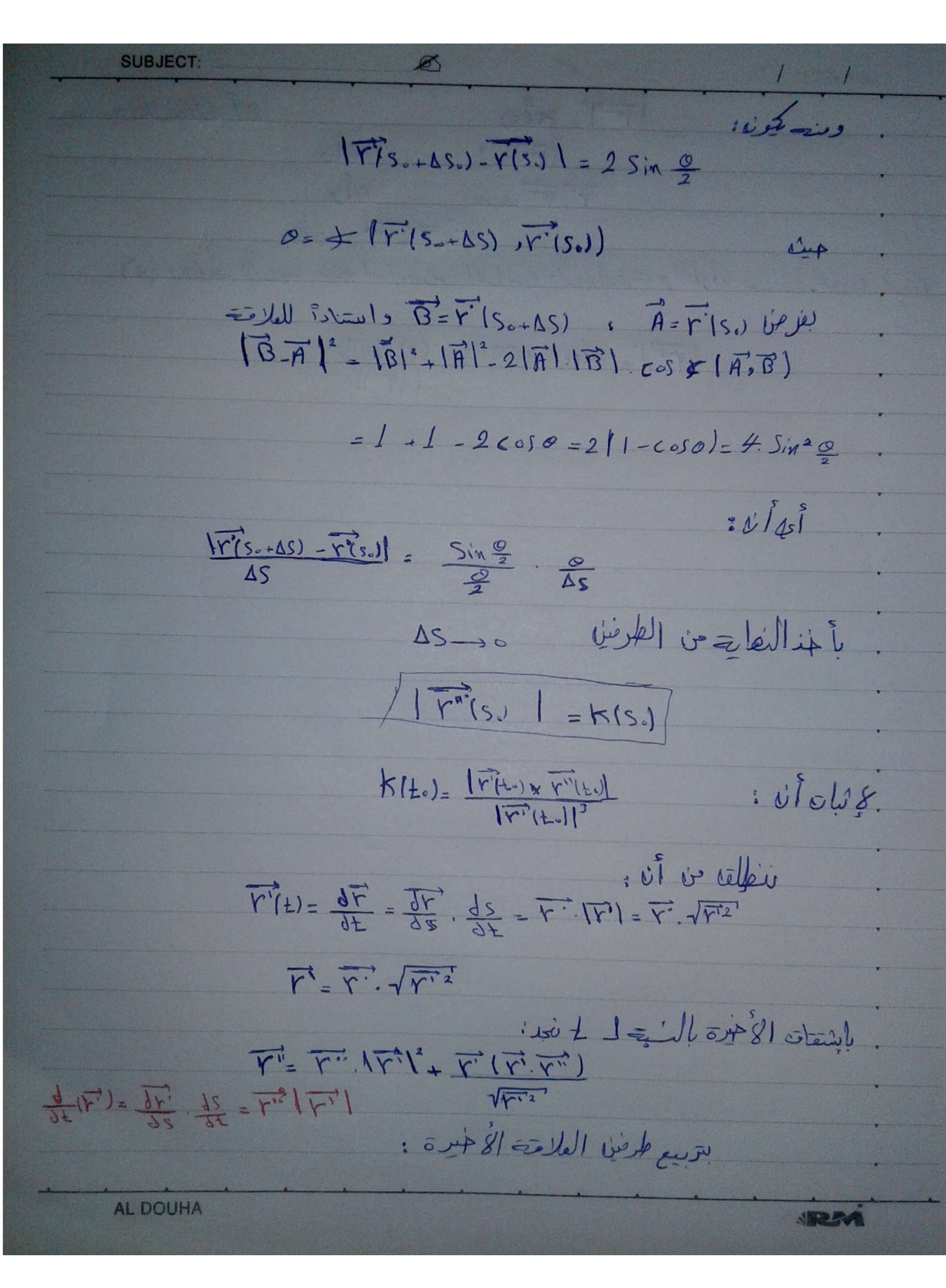
(10) $$k(s)=\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{\Delta s}$$

ملاحظة هامة:
ليكن L منحنياً $\vec{r}=\vec{r}(s)=\vec{r}(t)$ متجه الموضع المنحني L في M_0 منه حيث s الوسيط الطبيعي، t الوسيط العادي.
إن تقوس المنحني في M_0 منه يعطى بإحدى العلاقتين:

(11) $$k(s)=|\vec{r}''(s_0)|$$

(12) $$k(t_0)=\frac{|\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)|}{|\vec{r}'(t_0)|^3}$$

إثبات: من أجل الوسيط الطبيعي s نعلم أن:
$|\vec{r}'(s)|=|\vec{\tau}|=1$



ومنه يكون:

$$|\vec{r'}(s_0+\Delta s_0) - \vec{r'}(s_0)| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

حيث $\theta = \measuredangle(\vec{r'}(s_0+\Delta s), \vec{r'}(s_0))$

بفرض $\vec{A} = \vec{r'}(s_0)$ ، $\vec{B} = \vec{r'}(s_0+\Delta s)$ واستناداً للعلاقة

$$|\vec{B} - \vec{A}|^2 = |\vec{B}|^2 + |\vec{A}|^2 - 2|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\measuredangle(\vec{A},\vec{B})$$

$$= 1 + 1 - 2\cos\theta = 2(1-\cos\theta) = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

أي أن:

$$\frac{|\vec{r'}(s_0+\Delta s) - \vec{r'}(s_0)|}{\Delta s} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\theta}{\Delta s}$$

بأخذ النهاية من الطرفين $\Delta s \to 0$

$$\boxed{|\vec{r''}(s_0)| = k(s_0)}$$

لإثبات أن: $k(t_0) = \dfrac{|\vec{r'}(t_0)\times\vec{r''}(t_0)|}{|\vec{r'}(t_0)|^3}$

ننطلق من أن:

$$\vec{r'}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{\vec{r}}\cdot|\vec{r'}| = \dot{\vec{r}}\cdot\sqrt{\vec{r'}^2}$$

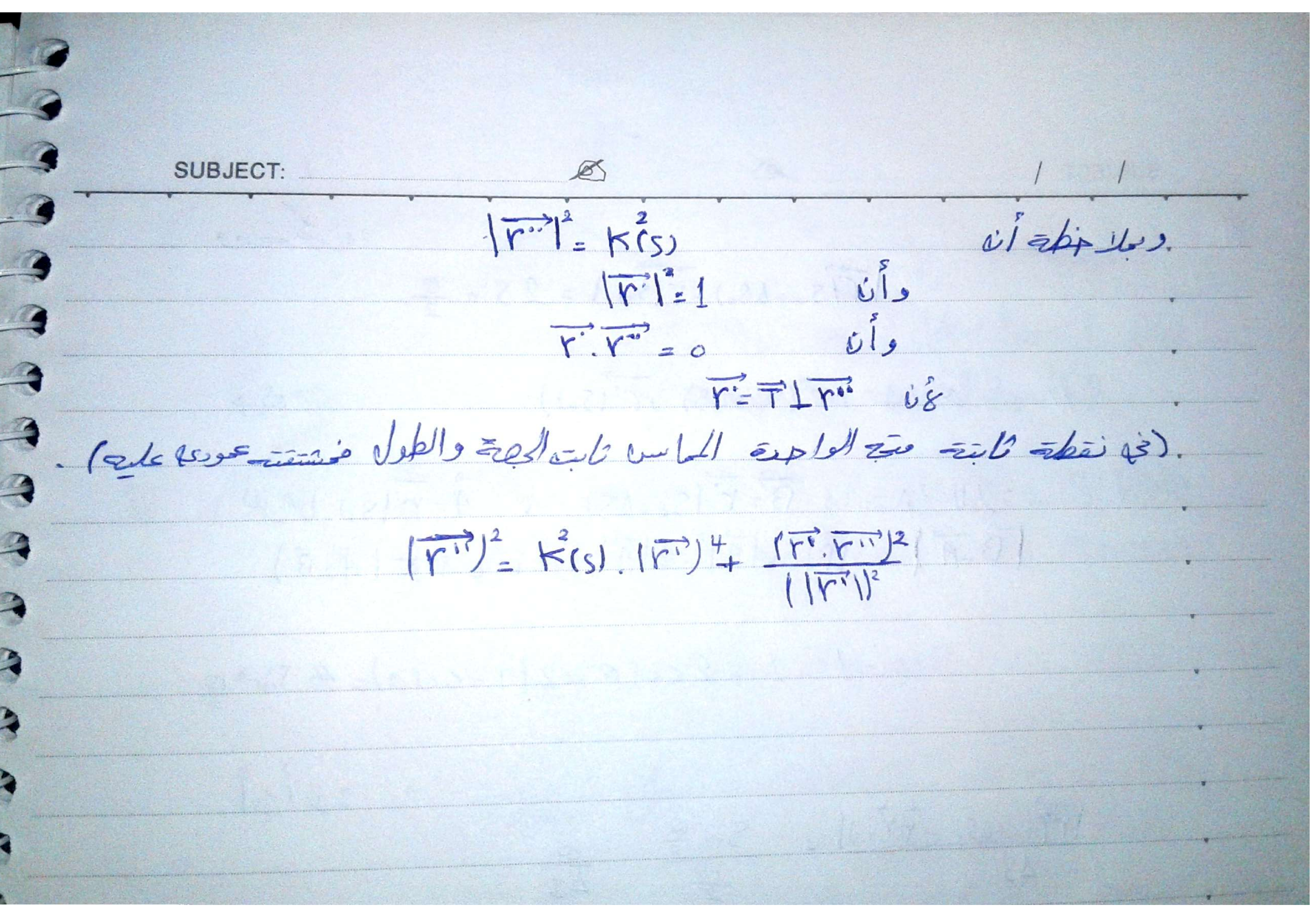
$$\vec{r'} = \dot{\vec{r}}\cdot\sqrt{\vec{r'}^2}$$

باشتقاق الأخيرة بالنسبة لـ t نجد:

$$\vec{r''} = \ddot{\vec{r}}\,|\vec{r'}|^2 + \frac{\dot{\vec{r}}\,(\vec{r'}\cdot\vec{r''})}{\sqrt{\vec{r'}^2}}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}) = \frac{d\dot{\vec{r}}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \ddot{\vec{r}}\,|\vec{r'}|$$

بتربيع طرفي العلاقة الأخيرة:



SUBJECT:

وبملاحظة أن $|\vec{r''}|^2 = K^2(s)$

وأن $|\vec{r'}|^2 = 1$

وأن $\vec{r'} \cdot \vec{r''} = 0$

فإن $\vec{r'} = \vec{T} \perp \vec{r''}$

(في نقطة ثابتة متجه الواحدة المماس ثابت الجهة والطول فمشتقته عمودي عليه).

$$(\vec{r''})^2 = K^2(s) \cdot (\vec{r'})^4 + \frac{(\vec{r'} \cdot \vec{r''})^2}{(|\vec{r'}|)^2}$$